Вопросы по предыдущей лекции:

1. Какое ДУ является линейным?
2. Какое ДУ является однородным?
3. Как определяется порядок ДУ?
4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?
5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?
6. Что такое «сеточная функция»?
7. Что такое «конечно-разностная схема»?
8. Что такое «шаблон»?

Методы представления ДУ в конечных разностях

Лекция 3

Тейлора

Первая производная

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_i (x_{i+1} - x_i) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i (x_{i+1} - x_i)^3 + \text{ЧВП}$$

$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad f_{i+1} = f(x_{i+1}), \quad f_i = f(x_i), \quad f_{i-1} = f(x_{i-1})$

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП}}_{O(\Delta x^2)} \qquad (1)$$

(1) $\Rightarrow$ $$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}}$$

Конечно-разностное соотношение «вперед»

или

правосторонняя конечно-разностная аппроксимация (2)

Выражение (2) имеет первый порядок точности

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП}}_{O(\Delta x^2)} \qquad (3)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}} \qquad (4)$$

Конечно-разностное соотношение «назад»

или

левосторонняя конечно-разностная аппроксимация

Выражение (4) имеет первый порядок точности

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП} \qquad (1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП} \qquad (3)$$

(1)-(3): $$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \underbrace{\frac{1}{3}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \text{ЧВП}}_{O(\Delta x^3)}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}} \qquad (5)$$

***Центральное* конечно-разностное соотношение**

Выражение (5) имеет второй порядок точности

Вторая производная

$$f_{i+1} = f_i + \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП$$

$$f_{i-1} = f_i - \left.\frac{df}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 - \frac{1}{6}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП$$

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2 f_i + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \underbrace{\frac{1}{12}\left.\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + ЧВП}_{O(\Delta x^4)}$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2 f_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2 f_i}{\Delta x^2}} \qquad (6)$$

Выражение (6) имеет второй порядок точности

Геометрическая интерпретация

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_i = tg\alpha^*$$

$$tg\alpha_1 = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

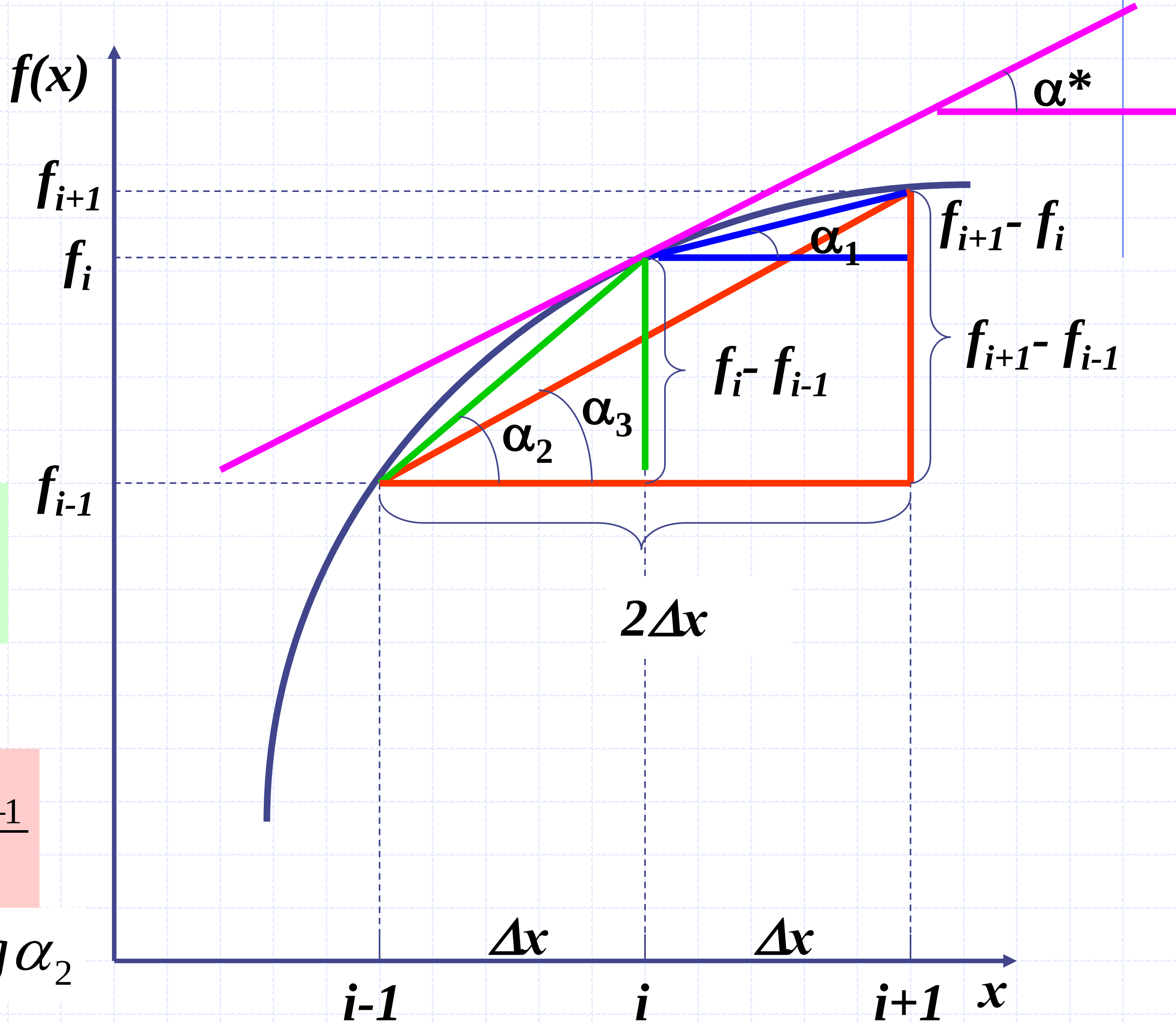
$$tg\alpha_1 < tg\alpha^*$$

$$tg\alpha_2 = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

$$tg\alpha_2 > tg\alpha^*$$

$$tg\alpha_3 = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$tg\alpha_1 < tg\alpha_3 < tg\alpha_2$$

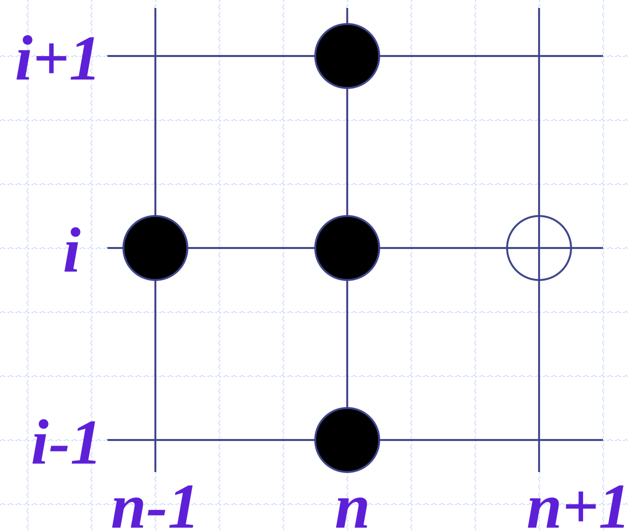


Частные производные

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad f_{i,j,k} = f(x_i, y_j, z_k), \quad f^{n}_{i,j,k} = f(t_n, x_i, y_j, z_k)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

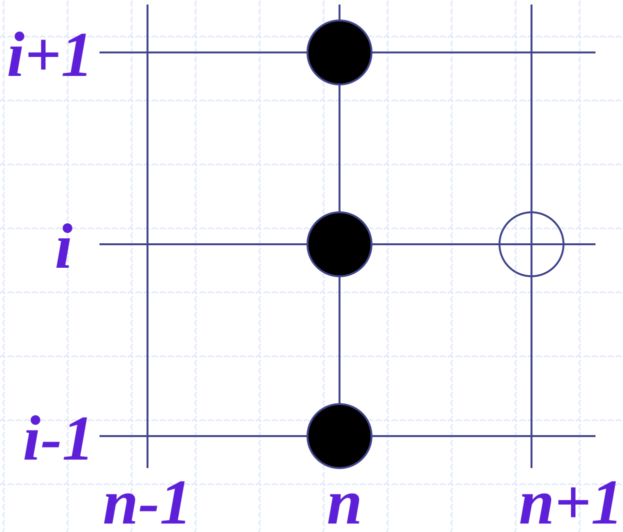
$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_i^n = f(t_n, x_i)$$



КРС (7) трехслойная, пятиточечная, второго порядка точности по всем переменным

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a\frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2} \qquad (7)$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = a\,\frac{f_{i+1}^{n} + f_{i-1}^{n} - 2 f_i^{n}}{\Delta x^2} \qquad (8)$$



КРС (8) двухслойная, четырехточечная, второго порядка точности по пространственным переменным и первого порядка точности по времени.

Вопросы:

1. Напишите <u>правостороннее</u> конечно-разностное соотношение для первой производной.

2. Напишите <u>левостороннее</u> конечно-разностное соотношение для первой производной.

3. Напишите <u>центральное</u> конечно-разностное соотношение для первой производной.

4. Напишите конечно-разностное соотношение для <u>второй</u> производной.

5. Какие из этих 4-х конечно-разностных соотношений имеют 1-й порядок точности, а какие 2-й?

6. Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j}$$

1. Напишите конечно-разностные соотношения «назад», «вперед» и центральное для следующих производных:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta y^2}$$

1. Напишите конечно-разностные соотношения «назад», «вперед» и центральное для следующих производных:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2 f_{i,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2 f_{i,j}}{\Delta y^2}$$

2. Получите конечно-разностное соотношение для смешанной производной:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad (1)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(2)}$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(3)}$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(4)}$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (1)$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (2)$$

$$f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} = 2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (3)$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j} \Delta x - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{i,j} \Delta y^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

$$f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} = -2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \quad (6)$$

$$f_{i+1,\,j+1} - f_{i+1,\,j-1} = 2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(5)}$$

$$f_{i-1,\,j-1} - f_{i-1,\,j+1} = -2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j} \Delta y + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y \qquad \textbf{(6)}$$

(5)+(6):

$$f_{i+1,\,j+1} - f_{i+1,\,j-1} + f_{i-1,\,j-1} - f_{i-1,\,j-1} = 4\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \Delta x \Delta y$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,\,j+1} - f_{i+1,\,j-1} - f_{i-1,\,j+1} + f_{i-1,\,j-1}}{4\Delta x \Delta y}}$$

3. Постройте , используя центральные разности, конечно-разностную схему и изобразите ее шаблон для следующего уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$